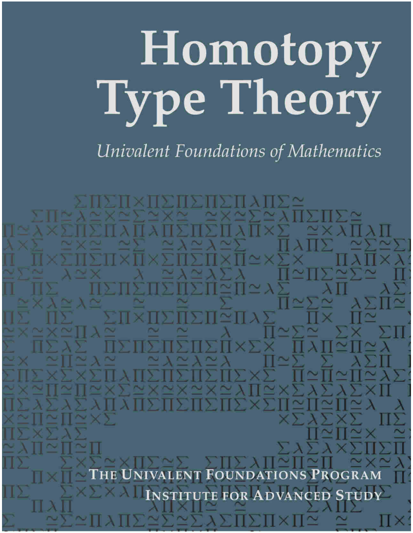
Расслоения и геометрический смысл некоторых обозначений в HOTT

Сергей Максименко

Лаборатория Топологии, Институт математики НАН Украины

18 марта, 2017

#kievfprog 2017.1,
Институт математики НАН Украины,
18-19 марта, 2017


Homotopy
Type Theory
Univalent Foundations of Mathematics
The Univalent Foundations Program
Institute for Advanced Study

Цель доклада – пояснить

- что такое расслоение
- что такое сечение расслоения
- что функции (отображения) являются *сечениями тривиальных расслоений*
- почему в HOTT следующие символы имеют одинаковый смысл

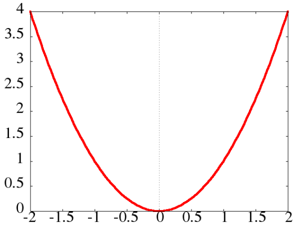
$$\prod_{(x:A)} B \equiv A \to B, \qquad \sum_{(x:A)} B \equiv A \times B.$$

Отображение

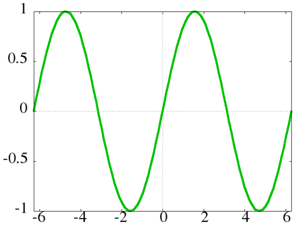
Пусть X, Y — два множества.
Отображение (или функция) $f : X \to Y$ это «правило», согласно которому каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент из Y, обозначаемый $f(x)$.

График отображения

Отображения (функции) можно мыслить как специальные подмножества декартовых произведений – *графики*.



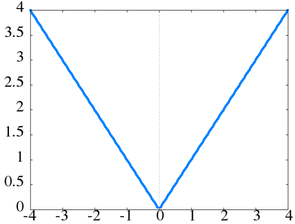
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$



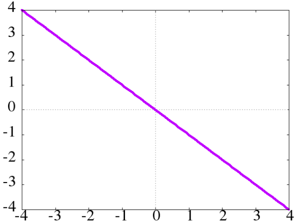
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \sin(x)$$

Если $f : X \to Y$ — отображение, то его график это следующее подмножество в $X \times Y$:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = |x|$$



$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = -x$$

Ключевое свойство графика: $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$: он пересекает <u>каждое</u> множество вида $x \times Y$ <u>в единственной точке</u>.

Рассмотрим отображение

$$p : X \times Y \to X, \qquad p(x, y) = x.$$

Оно называется проекция на X.
Теперь исходное отображение $f : X \to Y$ можно мыслить как отображение «обратное» к проекции p:

$$F : X \to X \times Y, \qquad F(x) = (x, f(x)),$$

в том смысле, что

$$p \circ F(x) = p(x, f(x)) = x$$

или, что

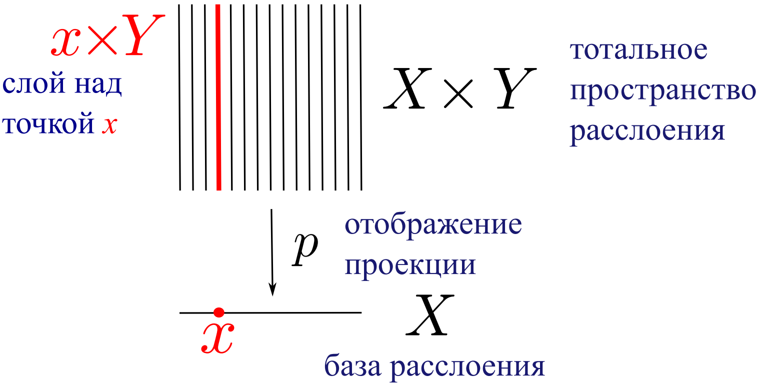
$$p \circ F = \mathrm{id}_X.$$

Тривиальное расслоение (trivial fibration)

Проекцию

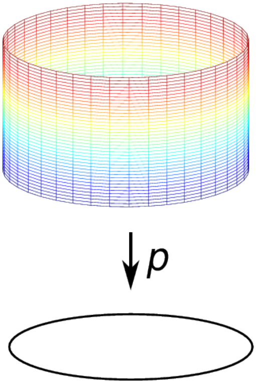
$$p : X \times Y \to X, \qquad p(x, y) = x.$$

также называют <u>тривиальным расслоением</u> над X со слоем Y.



Цилиндр

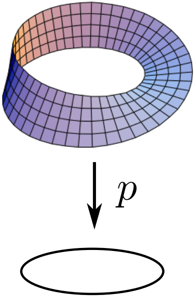
Рассмотрим отображение $p : S^1 \times [0,1] \to S^1$ цилиндра в окружность:



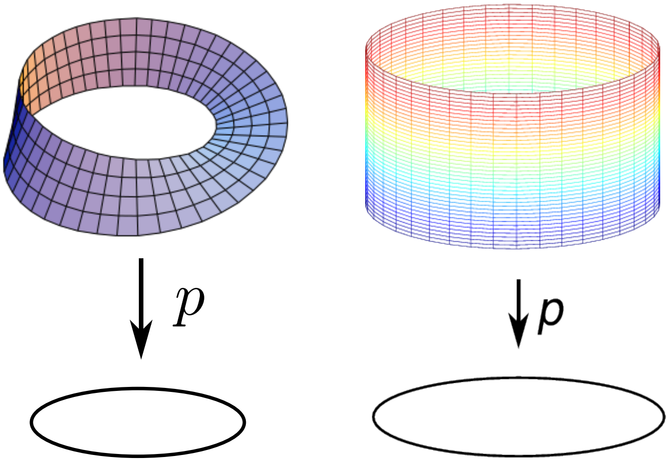
Это также тривиальное расслоение

Лист Мёбиуса

Рассмотрим отображение $p : M \to S^1$ листа Мёбиуса в окружность:



«Локально» это отображение «похоже» на проекцию из прямого произведения $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, но лист Мёбиуса топологически не изоморфен цилиндру.

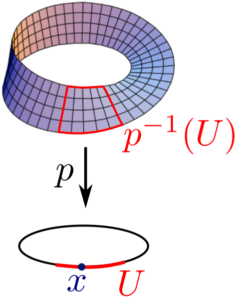

p
p

Локально тривиальное расслоение

Отображение $p : X \to Y$ называют <u>локально тривиальным расслоением</u> (localy trivial fibration) со слоем F, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что отображение

$$p : p^{-1}(U) \to U$$

«устроено» как тривиальное расслоение.



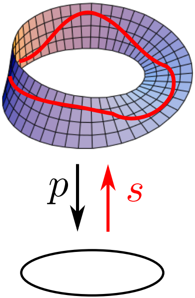
Сечения расслоений

Сечение расслоения (section) это аналог функции.
Пусть $p : X \to Y$ – (локально тривиальное) расслоение со слоем F. Отображение $s : Y \to X$ называется <u>сечением</u> p, если

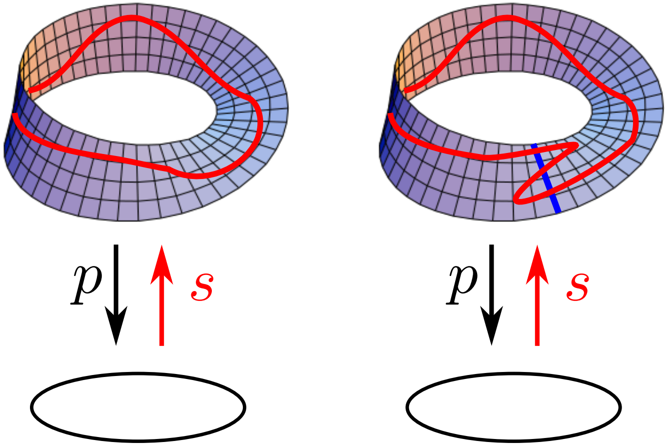
$$p \circ s(y) = y$$

для всех $y \in Y$, т.е.

$$p \circ s = \mathrm{id}_Y : Y \xrightarrow{s} X \xrightarrow{p} Y.$$



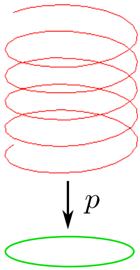
Сечение $s : Y \to X$ отображает каждую точку $x \in X$ в ее слой $p^{-1}(x)$. В частности, образ сечения пересекает каждый слой в единственной точке.



сечение

не сечение!

Не каждое расслоение обладает «непрерывными» сечениями:



Возникновение новой науки, направления, или «поднаправления», часто связано с желанием

сделать «похожие» рассуждения «одинаковыми»,

т.е. выработать язык на котором «похожие» доказательства (рассуждения) и конструкции из разных наук окажутся частными случаями одного рассуждения или конструкции.

Так было с теорией групп, топологией, теорией категорий, теорией типов, etc.

Гомотопическая теория типов возникла из желания объединить как минимум: логику, теорию множеств, теорию категорий, теорию гомотопий и программирование.

Теория типов	**Логика**	**Теория множеств**	**Теория гомотопий**
A $a : A$ $B(x)$	предложение доказательство A предикат	множество элемент множества семейство множеств	пространство точка расслоение
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$	$\perp$ (false), $\top$ (true)	$\varnothing$, $\{\varnothing\}$	$\varnothing$, базисная точка $*$
$A + B$	$A \vee B$	$A \sqcup B$ несвязное объединение	*несвязное объединение* $A \sqcup B$ или *букет* $A \vee B$
Произведения и расслоения			
$A \times B$ $\sum\limits_{(x:A)} B$	$A \wedge B$ $\exists_{x:A} B$	декартово произведение $\cup_{x \in A} B = A \times B$	топологическое произведение объединение слоев
$\sum\limits_{(x:A)} B(x)$	$\exists_{x:A} B(x)$	$\cup_{x \in A} B(x)$	тотальное пространство
Функции и сечения			
$A \to B$ $\prod\limits_{(x:A)} B$	$A \Rightarrow B$ $\forall_{x:A} B$	множество функций пространство сечений тривиального расслоения $A \to A \times B$	пространство функций
$\prod\limits_{(x:A)} B(x)$	$\forall_{x:A} B(x)$	пространство сечений расслоения $A \to \cup_{x \in A} B(x)$	

Термы типа $\prod\limits_{(x:A)} B$ – это способы каждому $x : A$ поставить в соответствие терм из B. Другими словами $s : \prod\limits_{(x:A)} B$ это сечение тривиального расслоения $s : A \to A \times B$. Это также можно интерпретировать (сокращенно обозначать) как функцию $s : A \to B$, [**H**, Appendix A.1.2]. Поэтому оба символа

$$A \to B :\equiv \prod_{(x:A)} B$$

обозначают пространство функций из A в B.

Термы типа $\prod\limits_{(x:A)} B(x)$ – это способ каждому $x : A$ поставить в соответствие терм из типа $B(x)$, зависящего от x. Другими словами $s : \prod\limits_{(x:A)} B(x)$ это сечение нетривиального расслоения над A со слоем $B(x)$ над точкой x.

Термы типа $\sum_{(x:A)} B$ – это способ выбора для некоторого терма $a : A$ некоторого терма $b : B$. Другими словами, это выбор точки $(x, b) \in A \times B$. Поэтому $\sum_{(x:A)} B$ можно интерпретировать (сокращенно обозначать) как прямое произведение $A \times B$, [Appendix A.1.3]:

$$A \times B :\equiv \sum_{(x:A)} B$$

Более общо, термы типа $\sum\limits_{(x:A)} B(x)$ – это способ выбора для некоторого терма $a : A$ некоторого терма $b : B(a)$ из типа $B(a)$ зависящего от a. Другими словами, это выбор <u>одной</u> точки в слое над $a : A$ тотального пространства некоторого расслоения $B(x) \to A$ над A. Поэтому $\sum\limits_{(x:A)} B(x)$ можно интерпретировать (сокращенно обозначать) как тотальное пространство расслоения $B(x) \to A$ над A.
Если символ $\sum$ интерпретировать как объединение (сумма множеств), то

$$\sum_{(x:A)} B(x) = \cup_{a:A} B(x)$$

это объединение слоев по всем точкам из A. Т.е. опять таки это тотальное пространство расслоения $B(x)$.